

الاسم:
الدرجة:
المدة:

أسئلة مقرر نظرية المعادلات التفاضلية الجزئية
لطلاب السنة الرابعة رياضيات
لدورة امتحانات الفصل الدراسي الثاني [2012-2013]

قسم الرياضيات
جامعة القاهرة

أجب عن الأسئلة التالية

السؤال الأول: (20 درجة) لتكن المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية من الشكل :

$$(1) \dots\dots\dots w'' + p(z)w' + q(z)w = 0 \text{ حيث } w \text{ الدالة المجهولة و } z \text{ المتحول المستقل.}$$

المطلوب: عرف النقطة العادية والنقطة الشاذة والنقطة الشاذة النظامية للمعادلة (1) ، ثم بين من أجل المعادلة:

$$\boxed{w'' + \frac{z+2}{z-1}w' + \frac{z}{(z+1)^2}w = 0}$$

النقاط الشاذة والعادية لها !

السؤال الثاني: (25 درجة) عين حل المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى (بطريقة النشر في متسلسلة قوى):

$$* \dots\dots\dots W' = Z^2 + W^2 \text{ الموافق للشرط الابتدائي:}$$

$$[Z = 0 \quad \text{عندما} \quad W = 1]$$

(نكتفي بحساب الثوابت الاختيارية حتى a_3).

السؤال الثالث: (35 درجة) لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية :

$$(1) \dots\dots\dots 2z^2w'' + zw' + (z^2 - 3)w = 0$$

أوجد الحل العام للمعادلة المعطاة في جوار النقطة ($z=0$) بعد إثبات أنها شاذة نظامية للمعادلة !

السؤال الرابع (20 درجة) : لتكن لدينا المسألة الحدية :

$$(1) \dots\dots\dots y'' - y = f(x)$$

وحيث $y(x)$ محدود من أجل $x \in (-\infty, +\infty)$

المطلوب : استخرج دالة غرين لهذه المسألة الحدية ثم اكتب صيغة الحل للمسألة بدلالته !



سید یحییٰ اسلم نذر

(1)

نقدیہ المعادلات / شریعة
عدد (6) اور رقم 1000
تاریخ 22 / 8 / 2013 (دو ماہانہ)

سوال الاول: لتوجد حل المعادلة:

20

$$W = z + W^2 \quad (1)$$

الموافق للشرط (2) $W=1$ إذا $z=0$

حيث نفرض الحل على شكل متسلسلة (نشر) بالشكل:

$$W = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots \quad (3)$$

نقسم هذه المعادلة (3) بالنسبة لـ z مرة واحدة ونضرب في المعادلة المعطاة (1) فنجد:

$$W' = \sum_{i=1}^{\infty} i a_i z^{i-1} \quad (2)$$

من التعريف في المعادلة (1) يكون:

$$\sum_{i=1}^{\infty} i a_i z^{i-1} = z + \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i z^i \right)^2 \quad (2)$$

نضربها في كل $i+1$ في الطرف اليسار لنصل إلى الطرف الأيمن
فكل لطيفة: $i+1$ i $i-1$ $i-2$ $i-3$ $i-4$ $i-5$ $i-6$ $i-7$ $i-8$ $i-9$ $i-10$ $i-11$ $i-12$ $i-13$ $i-14$ $i-15$ $i-16$ $i-17$ $i-18$ $i-19$ $i-20$ $i-21$ $i-22$ $i-23$ $i-24$ $i-25$ $i-26$ $i-27$ $i-28$ $i-29$ $i-30$ $i-31$ $i-32$ $i-33$ $i-34$ $i-35$ $i-36$ $i-37$ $i-38$ $i-39$ $i-40$ $i-41$ $i-42$ $i-43$ $i-44$ $i-45$ $i-46$ $i-47$ $i-48$ $i-49$ $i-50$ $i-51$ $i-52$ $i-53$ $i-54$ $i-55$ $i-56$ $i-57$ $i-58$ $i-59$ $i-60$ $i-61$ $i-62$ $i-63$ $i-64$ $i-65$ $i-66$ $i-67$ $i-68$ $i-69$ $i-70$ $i-71$ $i-72$ $i-73$ $i-74$ $i-75$ $i-76$ $i-77$ $i-78$ $i-79$ $i-80$ $i-81$ $i-82$ $i-83$ $i-84$ $i-85$ $i-86$ $i-87$ $i-88$ $i-89$ $i-90$ $i-91$ $i-92$ $i-93$ $i-94$ $i-95$ $i-96$ $i-97$ $i-98$ $i-99$ $i-100$ $i-101$ $i-102$ $i-103$ $i-104$ $i-105$ $i-106$ $i-107$ $i-108$ $i-109$ $i-110$ $i-111$ $i-112$ $i-113$ $i-114$ $i-115$ $i-116$ $i-117$ $i-118$ $i-119$ $i-120$ $i-121$ $i-122$ $i-123$ $i-124$ $i-125$ $i-126$ $i-127$ $i-128$ $i-129$ $i-130$ $i-131$ $i-132$ $i-133$ $i-134$ $i-135$ $i-136$ $i-137$ $i-138$ $i-139$ $i-140$ $i-141$ $i-142$ $i-143$ $i-144$ $i-145$ $i-146$ $i-147$ $i-148$ $i-149$ $i-150$ $i-151$ $i-152$ $i-153$ $i-154$ $i-155$ $i-156$ $i-157$ $i-158$ $i-159$ $i-160$ $i-161$ $i-162$ $i-163$ $i-164$ $i-165$ $i-166$ $i-167$ $i-168$ $i-169$ $i-170$ $i-171$ $i-172$ $i-173$ $i-174$ $i-175$ $i-176$ $i-177$ $i-178$ $i-179$ $i-180$ $i-181$ $i-182$ $i-183$ $i-184$ $i-185$ $i-186$ $i-187$ $i-188$ $i-189$ $i-190$ $i-191$ $i-192$ $i-193$ $i-194$ $i-195$ $i-196$ $i-197$ $i-198$ $i-199$ $i-200$ $i-201$ $i-202$ $i-203$ $i-204$ $i-205$ $i-206$ $i-207$ $i-208$ $i-209$ $i-210$ $i-211$ $i-212$ $i-213$ $i-214$ $i-215$ $i-216$ $i-217$ $i-218$ $i-219$ $i-220$ $i-221$ $i-222$ $i-223$ $i-224$ $i-225$ $i-226$ $i-227$ $i-228$ $i-229$ $i-230$ $i-231$ $i-232$ $i-233$ $i-234$ $i-235$ $i-236$ $i-237$ $i-238$ $i-239$ $i-240$ $i-241$ $i-242$ $i-243$ $i-244$ $i-245$ $i-246$ $i-247$ $i-248$ $i-249$ $i-250$ $i-251$ $i-252$ $i-253$ $i-254$ $i-255$ $i-256$ $i-257$ $i-258$ $i-259$ $i-260$ $i-261$ $i-262$ $i-263$ $i-264$ $i-265$ $i-266$ $i-267$ $i-268$ $i-269$ $i-270$ $i-271$ $i-272$ $i-273$ $i-274$ $i-275$ $i-276$ $i-277$ $i-278$ $i-279$ $i-280$ $i-281$ $i-282$ $i-283$ $i-284$ $i-285$ $i-286$ $i-287$ $i-288$ $i-289$ $i-290$ $i-291$ $i-292$ $i-293$ $i-294$ $i-295$ $i-296$ $i-297$ $i-298$ $i-299$ $i-300$ $i-301$ $i-302$ $i-303$ $i-304$ $i-305$ $i-306$ $i-307$ $i-308$ $i-309$ $i-310$ $i-311$ $i-312$ $i-313$ $i-314$ $i-315$ $i-316$ $i-317$ $i-318$ $i-319$ $i-320$ $i-321$ $i-322$ $i-323$ $i-324$ $i-325$ $i-326$ $i-327$ $i-328$ $i-329$ $i-330$ $i-331$ $i-332$ $i-333$ $i-334$ $i-335$ $i-336$ $i-337$ $i-338$ $i-339$ $i-340$ $i-341$ $i-342$ $i-343$ $i-344$ $i-345$ $i-346$ $i-347$ $i-348$ $i-349$ $i-350$ $i-351$ $i-352$ $i-353$ $i-354$ $i-355$ $i-356$ $i-357$ $i-358$ $i-359$ $i-360$ $i-361$ $i-362$ $i-363$ $i-364$ $i-365$ $i-366$ $i-367$ $i-368$ $i-369$ $i-370$ $i-371$ $i-372$ $i-373$ $i-374$ $i-375$ $i-376$ $i-377$ $i-378$ $i-379$ $i-380$ $i-381$ $i-382$ $i-383$ $i-384$ $i-385$ $i-386$ $i-387$ $i-388$ $i-389$ $i-390$ $i-391$ $i-392$ $i-393$ $i-394$ $i-395$ $i-396$ $i-397$ $i-398$ $i-399$ $i-400$ $i-401$ $i-402$ $i-403$ $i-404$ $i-405$ $i-406$ $i-407$ $i-408$ $i-409$ $i-410$ $i-411$ $i-412$ $i-413$ $i-414$ $i-415$ $i-416$ $i-417$ $i-418$ $i-419$ $i-420$ $i-421$ $i-422$ $i-423$ $i-424$ $i-425$ $i-426$ $i-427$ $i-428$ $i-429$ $i-430$ $i-431$ $i-432$ $i-433$ $i-434$ $i-435$ $i-436$ $i-437$ $i-438$ $i-439$ $i-440$ $i-441$ $i-442$ $i-443$ $i-444$ $i-445$ $i-446$ $i-447$ $i-448$ $i-449$ $i-450$ $i-451$ $i-452$ $i-453$ $i-454$ $i-455$ $i-456$ $i-457$ $i-458$ $i-459$ $i-460$ $i-461$ $i-462$ $i-463$ $i-464$ $i-465$ $i-466$ $i-467$ $i-468$ $i-469$ $i-470$ $i-471$ $i-472$ $i-473$ $i-474$ $i-475$ $i-476$ $i-477$ $i-478$ $i-479$ $i-480$ $i-481$ $i-482$ $i-483$ $i-484$ $i-485$ $i-486$ $i-487$ $i-488$ $i-489$ $i-490$ $i-491$ $i-492$ $i-493$ $i-494$ $i-495$ $i-496$ $i-497$ $i-498$ $i-499$ $i-500$ $i-501$ $i-502$ $i-503$ $i-504$ $i-505$ $i-506$ $i-507$ $i-508$ $i-509$ $i-510$ $i-511$ $i-512$ $i-513$ $i-514$ $i-515$ $i-516$ $i-517$ $i-518$ $i-519$ $i-520$ $i-521$ $i-522$ $i-523$ $i-524$ $i-525$ $i-526$ $i-527$ $i-528$ $i-529$ $i-530$ $i-531$ $i-532$ $i-533$ $i-534$ $i-535$ $i-536$ $i-537$ $i-538$ $i-539$ $i-540$ $i-541$ $i-542$ $i-543$ $i-544$ $i-545$ $i-546$ $i-547$ $i-548$ $i-549$ $i-550$ $i-551$ $i-552$ $i-553$ $i-554$ $i-555$ $i-556$ $i-557$ $i-558$ $i-559$ $i-560$ $i-561$ $i-562$ $i-563$ $i-564$ $i-565$ $i-566$ $i-567$ $i-568$ $i-569$ $i-570$ $i-571$ $i-572$ $i-573$ $i-574$ $i-575$ $i-576$ $i-577$ $i-578$ $i-579$ $i-580$ $i-581$ $i-582$ $i-583$ $i-584$ $i-585$ $i-586$ $i-587$ $i-588$ $i-589$ $i-590$ $i-591$ $i-592$ $i-593$ $i-594$ $i-595$ $i-596$ $i-597$ $i-598$ $i-599$ $i-600$ $i-601$ $i-602$ $i-603$ $i-604$ $i-605$ $i-606$ $i-607$ $i-608$ $i-609$ $i-610$ $i-611$ $i-612$ $i-613$ $i-614$ $i-615$ $i-616$ $i-617$ $i-618$ $i-619$ $i-620$ $i-621$ $i-622$ $i-623$ $i-624$ $i-625$ $i-626$ $i-627$ $i-628$ $i-629$ $i-630$ $i-631$ $i-632$ $i-633$ $i-634$ $i-635$ $i-636$ $i-637$ $i-638$ $i-639$ $i-640$ $i-641$ $i-642$ $i-643$ $i-644$ $i-645$ $i-646$ $i-647$ $i-648$ $i-649$ $i-650$ $i-651$ $i-652$ $i-653$ $i-654$ $i-655$ $i-656$ $i-657$ $i-658$ $i-659$ $i-660$ $i-661$ $i-662$ $i-663$ $i-664$ $i-665$ $i-666$ $i-667$ $i-668$ $i-669$ $i-670$ $i-671$ $i-672$ $i-673$ $i-674$ $i-675$ $i-676$ $i-677$ $i-678$ $i-679$ $i-680$ $i-681$ $i-682$ $i-683$ $i-684$ $i-685$ $i-686$ $i-687$ $i-688$ $i-689$ $i-690$ $i-691$ $i-692$ $i-693$ $i-694$ $i-695$ $i-696$ $i-697$ $i-698$ $i-699$ $i-700$ $i-701$ $i-702$ $i-703$ $i-704$ $i-705$ $i-706$ $i-707$ $i-708$ $i-709$ $i-710$ $i-711$ $i-712$ $i-713$ $i-714$ $i-715$ $i-716$ $i-717$ $i-718$ $i-719$ $i-720$ $i-721$ $i-722$ $i-723$ $i-724$ $i-725$ $i-726$ $i-727$ $i-728$ $i-729$ $i-730$ $i-731$ $i-732$ $i-733$ $i-734$ $i-735$ $i-736$ $i-737$ $i-738$ $i-739$ $i-740$ $i-741$ $i-742$ $i-743$ $i-744$ $i-745$ $i-746$ $i-747$ $i-748$ $i-749$ $i-750$ $i-751$ $i-752$ $i-753$ $i-754$ $i-755$ $i-756$ $i-757$ $i-758$ $i-759$ $i-760$ $i-761$ $i-762$ $i-763$ $i-764$ $i-765$ $i-766$ $i-767$ $i-768$ $i-769$ $i-770$ $i-771$ $i-772$ $i-773$ $i-774$ $i-775$ $i-776$ $i-777$ $i-778$ $i-779$ $i-780$ $i-781$ $i-782$ $i-783$ $i-784$ $i-785$ $i-786$ $i-787$ $i-788$ $i-789$ $i-790$ $i-791$ $i-792$ $i-793$ $i-794$ $i-795$ $i-796$ $i-797$ $i-798$ $i-799$ $i-800$ $i-801$ $i-802$ $i-803$ $i-804$ $i-805$ $i-806$ $i-807$ $i-808$ $i-809$ $i-810$ $i-811$ $i-812$ $i-813$ $i-814$ $i-815$ $i-816$ $i-817$ $i-818$ $i-819$ $i-820$ $i-821$ $i-822$ $i-823$ $i-824$ $i-825$ $i-826$ $i-827$ $i-828$ $i-829$ $i-830$ $i-831$ $i-832$ $i-833$ $i-834$ $i-835$ $i-836$ $i-837$ $i-838$ $i-839$ $i-840$ $i-841$ $i-842$ $i-843$ $i-844$ $i-845$ $i-846$ $i-847$ $i-848$ $i-849$ $i-850$ $i-851$ $i-852$ $i-853$ $i-854$ $i-855$ $i-856$ $i-857$ $i-858$ $i-859$ $i-860$ $i-861$ $i-862$ $i-863$ $i-864$ $i-865$ $i-866$ $i-867$ $i-868$ $i-869$ $i-870$ $i-871$ $i-872$ $i-873$ $i-874$ $i-875$ $i-876$ $i-877$ $i-878$ $i-879$ $i-880$ $i-881$ $i-882$ $i-883$ $i-884$ $i-885$ $i-886$ $i-887$ $i-888$ $i-889$ $i-890$ $i-891$ $i-892$ $i-893$ $i-894$ $i-895$ $i-896$ $i-897$ $i-898$ $i-899$ $i-900$ $i-901$ $i-902$ $i-903$ $i-904$ $i-905$ $i-906$ $i-907$ $i-908$ $i-909$ $i-910$ $i-911$ $i-912$ $i-913$ $i-914$ $i-915$ $i-916$ $i-917$ $i-918$ $i-919$ $i-920$ $i-921$ $i-922$ $i-923$ $i-924$ $i-925$ $i-926$ $i-927$ $i-928$ $i-929$ $i-930$ $i-931$ $i-932$ $i-933$ $i-934$ $i-935$ $i-936$ $i-937$ $i-938$ $i-939$ $i-940$ $i-941$ $i-942$ $i-943$ $i-944$ $i-945$ $i-946$ $i-947$ $i-948$ $i-949$ $i-950$ $i-951$ $i-952$ $i-953$ $i-954$ $i-955$ $i-956$ $i-957$ $i-958$ $i-959$ $i-960$ $i-961$ $i-962$ $i-963$ $i-964$ $i-965$ $i-966$ $i-967$ $i-968$ $i-969$ $i-970$ $i-971$ $i-972$ $i-973$ $i-974$ $i-975$ $i-976$ $i-977$ $i-978$ $i-979$ $i-980$ $i-981$ $i-982$ $i-983$ $i-984$ $i-985$ $i-986$ $i-987$ $i-988$ $i-989$ $i-990$ $i-991$ $i-992$ $i-993$ $i-994$ $i-995$ $i-996$ $i-997$ $i-998$ $i-999$ $i-1000$ $i-1001$ $i-1002$ $i-1003$ $i-1004$ $i-1005$ $i-1006$ $i-1007$ $i-1008$ $i-1009$ $i-1010$ $i-1011$ $i-1012$ $i-1013$ $i-1014$ $i-1015$ $i-1016$ $i-1017$ $i-1018$ $i-1019$ $i-1020$ $i-1021$ $i-1022$ $i-1023$ $i-1024$ $i-1025$ $i-1026$ $i-1027$ $i-1028$ $i-1029$ $i-1030$ $i-1031$ $i-1032$ $i-1033$ $i-1034$ $i-1035$ $i-1036$ $i-1037$ $i-1038$ $i-1039$ $i-1040$ $i-1041$ $i-1042$ $i-1043$ $i-1044$ $i-1045$ $i-1046$ $i-1047$ $i-1048$ $i-1049$ $i-1050$ $i-1051$ $i-1052$ $i-1053$ $i-1054$ $i-1055$ $i-1056$ $i-1057$ $i-1058$ $i-1059$ $i-1060$ $i-1061$ $i-1062$ $i-1063$ $i-1064$ $i-1065$ $i-1066$ $i-1067$ $i-1068$ $i-1069$ $i-1070$ $i-1071$ $i-1072$ $i-1073$ $i-1074$ $i-1075$ $i-1076$ $i-1077$ $i-1078$ $i-1079$ $i-1080$ $i-1081$ $i-1082$ $i-1083$ $i-1084$ $i-1085$ $i-1086$ $i-1087$ $i-1088$ $i-1089$ $i-1090$ $i-1091$ $i-1092$ $i-1093$ $i-1094$ $i-1095$ $i-1096$ $i-1097$ $i-1098$ $i-1099$ $i-1100$ $i-1101$ $i-1102$ $i-1103$ $i-1104$ $i-1105$ $i-1106$ $i-1107$ $i-1108$ $i-1109$ $i-1110$ $i-1111$ $i-1112$ $i-1113$ $i-1114$ $i-1115$ $i-1116$ $i-1117$ $i-1118$ $i-1119$ $i-1120$ $i-1121$ $i-1122$ $i-1123$ $i-1124$ $i-1125$ $i-1126$ $i-1127$ $i-1128$ $i-1129$ $i-1130$ $i-1131$ $i-1132$ $i-1133$ $i-1134$ $i-1135$ $i-1136$ $i-1137$ $i-1138$ $i-1139$ $i-1140$ $i-1141$ $i-1142$ $i-$

تاريخ: 2013-8-22
 رقم الملف: 22-8-2013
 (دور الثاني)

2

معادلات تفاضلية

معادلة تفاضلية $W'' - zW = 0$ (1)

$W(0) = 1, W'(0) = 0$

نريد حل هذه المعادلة في $z=0$

نكتب $W(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

$W(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

نستخدم طريقة لافيفر

$(1) \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+1} = 0$

نلاحظ ان الحد الاول هو $2a_2$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} z^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} z^n = 0$

$2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} - a_{n-1}] z^n = 0$

وذلك (بالحاجة من الأمان مع الجاهل للوفرة يكون)

(I) $(i+1)a_{i+1} = \sum_{j=0}^i a_j a_{i-j}; \quad i \neq 2$

$\sum_{i=2}^n \frac{1}{i} \ln \frac{1}{i} = -\sum_{i=2}^n \frac{1}{i} \ln i$

$$(II) \quad 3 \cdot a_3 = 1 + \sum_{j=0}^2 a_j \cdot a_{2-j}; \quad i=2$$

$\{z \Rightarrow \text{bis } w=1 \text{ mgl}\}$ in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

(2) $\frac{1}{\rho} \rightarrow \frac{1}{\rho_0} \Rightarrow \frac{1}{\rho_0} = 1, (w_0 = a_0)$

$$(I)_2 \Rightarrow \prod_{i=0}^{\infty} a_i = a_0 \cdot a_0 = a_0^2 \approx 1 \Rightarrow \boxed{a_1 = 1}$$

(I) $\Rightarrow \Rightarrow a_2 \Rightarrow 2a_2 = a_0 \cdot a_1 + a_1 \cdot a_0 = 2a_0 a_1 = 2$

$$(II) \Rightarrow \downarrow_{i=2} \Rightarrow a_3: \Rightarrow 3a_3 = 1 + a_0a_2 + a_1a_1 + a_2a_0 = 4$$

188

وسه اکل کو به استغفر فی (3) :

$$W(z) = 1 + z + z^2 + \frac{1}{2}z^3 + \dots$$

نوع المتكاملات

5

فقره (ب) من المادة 15
22-8-2013

وهو (ب) (15) من المادة 15

المطلوب في الموضوع $\left[\begin{matrix} a & b \\ c & (1+a) \end{matrix} \right] = 0$ 2

لوجود كل نقطة (3)

وكل نقطة (ب) (15) من المادة 15

$a > 0$, $b > 0$ كل نقطة (ب) (15) من المادة 15

2

أو

الاسم :
الدرجة :
المدة :

أسئلة مقرر نظرية المعادلات التفاضلية
لطلاب السنة الرابعة - رياضيات
دورة الامتحانات الإضافية (2013-2014)

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

أجب عن الأسئلة التالية:

السؤال الأول (20 درجة): عين حل المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى التالية:

* $w' = z^2 + w^2$ الموافق للشرط الابتدائي :

$$\{ z = 0 \text{ عندما } w = 1 \}$$

(بطريقة النشر بمتسلسلة قوى ونكتفي بحساب الثوابت الاختيارية حتى a_3).

السؤال الثاني (30 درجة): لدينا المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية:

(1) $w'' - zw = 0$ مع شروط البدء :

(2) $w'(0) = 0$ ، $w(0) = 1$ والمطلوب أوجد الحل العام

بطريقة سلاسل النشر في جوار النقطة العادية $z=0$ ، ثم أحسب الحل الخاص الموافق للشروط الابتدائية المعطاة في (2) ! [ملاحظة: بحساب الثوابت حتى a_6 في الحل]

السؤال الثالث (25 درجة): لتكن لدينا المعادلة التفاضلية:

(1) $zw'' + (a+b+z)w' + aw = 0$ وحيث $a, b \in R$

ولنفرض أن العلاقة التكاملية : $w = \int e^{\int p(\xi) d\xi} p(\xi) d\xi$ هي حل للمعادلة التفاضلية المعطاة (1)،

عين هذا الحل [بتعيين $p(\xi)$ له] والشرط الموافق لوجود هذا الحل و مبينا اختيار الطريق
C إذا كان $a > 0$ و $b > 0$!

السؤال الرابع (25 درجة): لتكن لدينا المسألة الحدية :

$$y' - y = f(x) \quad (1) \quad \text{.....}$$

وحيث $y(x)$ محدود من أجل $x \in (-\infty, +\infty)$

المطلوب : استخرج دالة غرين لهذه المسألة الحدية ثم اكتب صيغة الحل المعبرة للمسألة بدلالته !

د. ياسر السماعيل

انتهت الأسئلة مع التوفيق والنجاح للجميع !

حمص في 2014-8-17



1

المقصود من المسألة -
تقريباً - لتقريباً

الطريق التي أتت بها -
لقد أتت بها -
(17.8.2014) (4.2.2014)

عدد الأوراق (7)!

د. م. م. م.



هو السؤال الأول -
لقد أتت بها -

$$W = z^2 + w^2 \quad (1)$$

20

الموقف الأول -
(w=1, z=0)

(2)

بعض فرضياتي -
بعض فرضياتي -

$$W = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \quad (3)$$

نستعمل هذه الطريقة (3) -
نستعمل هذه الطريقة (3) -

بعض فرضياتي -
بعض فرضياتي -

$$W = \sum_{i=1}^{\infty} i a_{i-1} z^{i-1} \quad (3)$$

بعض فرضياتي -
بعض فرضياتي -

$$(1) \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} i a_{i-1} z^{i-1} = z^2 + \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i z^i \right)^2 \quad (4)$$

بعض فرضياتي -
بعض فرضياتي -

$$(4) \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} (i+1) a_i z^i = z^2 + \sum_{i=1}^{\infty} z^i \sum_{j=1}^{\infty} a_j a_{i-j+1} \quad (4)$$



$$(*) \text{ من أجل } \sqrt{w} \text{ من أجل } \sqrt{w} \text{ من أجل } \sqrt{w}$$

(I)

$$(i+1) a_{i+1} = \sum_{j=0}^i a_j a_{i-j} \quad ; i \neq 2$$

$$(i+1) a_{i+1} = \sum_{j=0}^i a_j a_{i-j} \quad ; i = 2 \text{ من أجل } \sqrt{w}$$

$$(II) \quad 3a_3 = 1 + \sum_{j=0}^2 a_j a_{2-j} \quad ; i = 2$$

$$[z=0 \text{ من أجل } w=1 \text{ من أجل } \sqrt{w} \text{ من أجل } \sqrt{w}]$$

$$(2) \text{ من أجل } \sqrt{w} \Rightarrow \boxed{a_0 = 1} \quad (w_0 = a_0)$$

$$(I) \Rightarrow \boxed{a_1 = 1} \Rightarrow a_1 = a_0 a_0 = a_0^2 = 1$$

$$(I) \Rightarrow \boxed{a_2 = 1} \Rightarrow a_2 = a_0 a_1 + a_1 a_0 = 2a_0 a_1 = 2$$

$$(II) \Rightarrow \boxed{a_3 = \frac{4}{3}}$$

... (3) ...

$$[w(z) = 1 + z + z^2 + \frac{4}{3}z^3 + \dots]$$

المسألة 17.8
نقطة لمعادلة تفاضلية
دور 17.8

(2)

المسألة 17.8: إيجاد حل لمعادلة تفاضلية

30

$$w'' - zw = 0 \quad (1)$$



$$[w(0)=1, w'(0)=0] \quad (2)$$

نريد إيجاد حل للمعادلة (1) مع الشروط (2)

نكتب الحل على شكل متسلسلة قوى

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (3)$$

نستعمل هذه الطريقة لإيجاد حصة المتسلسلة z ، ونفرض المعادلة

$$w' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}, \quad w'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2} \quad (4)$$

ننقل في (1) كل حد

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2} - z \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+1} = 0 \quad (5)$$

نلاحظ أن الحد $n=0$ في المجموع الثاني يساوي صفر، وننقل الحد $n=1$ في المجموع الثاني إلى المجموع الأول

سلسلہ
تفاضل
17.8.2014

(3)

W

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}z^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}z^n = 0$$

دو طرفوں کو الگ کر کے مساوی کر دیا جائے گا

$$2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1}]z^n = 0 \quad (5)$$

دوسری طرف سے

$$2a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 0 \quad (2)$$

وہاں سے پتہ چلتا ہے کہ $a_2 = 0$ (مساوی کر دیا جائے گا)

$$a_{n+2} = \frac{a_{n-1}}{(n+2)(n+1)}, \quad \forall n \geq 1$$

$$n=1 \Rightarrow a_3 = \frac{a_0}{3 \times 2}$$

$$n=2 \Rightarrow a_4 = \frac{a_1}{4 \times 3}$$

$$n=3 \Rightarrow a_5 = \frac{a_2}{5 \times 4} = 0$$

$$n=4 \Rightarrow a_6 = \frac{a_3}{2 \times 3 \times 5 \times 6}$$

میں سے پتہ چلتا ہے کہ a_n (n=0, 1, ...) کے لیے
 a_0, a_1 کے لیے a_n کا تعین ہو گا

$$W = a_0 \left[1 + \frac{1}{2 \times 3} z^3 + \frac{1}{2 \times 3 \times 5 \times 6} z^6 + \dots \right] + a_1 \left[2 + \frac{1}{3 \times 4} z^4 + \dots \right] \quad (2)$$

میتوانیم این دو سری را با هم جمع کنیم و به دست آوریم:

$$W = a_0 W_1 + a_1 W_2 \quad (1)$$

مجموع دو سری

برای تعیین ضرایب a_0 و a_1 باید از شرایط اولیه استفاده کنیم. در اینجا $W(0) = 1$ داریم.

$$W(0) = 1 = a_0 + 0 + 0 + 0 + \dots \Rightarrow a_0 = 1 \quad (1)$$

همچنین می‌دانیم که $W'(0) = 0$ است. با مشتق گرفتن از (1) و قرار دادن $z=0$ داریم:

$$[W'(0) = 0] \Rightarrow a_1 = 0 \quad (2)$$

بنابراین ضرایب $a_0 = 1$ و $a_1 = 0$ به دست می‌آید.

$$W = W_1 = 1 + \frac{z^3}{2 \times 3} + \frac{z^6}{2 \times 3 \times 5 \times 6} + \dots$$

پس جواب نهایی به صورت زیر است:



و تمام شد.

تقریر کے لیے مقرر کنندہ
 ڈیپارٹمنٹ آف سائنس
 17.8.2014

4

حوالہ: تقریر کے لیے مقرر کنندہ

$$zw'' + (a+b+z)w' + aw = 0 \quad (1)$$

$a, b \in \mathbb{R}$

$$w = \int_C z^\alpha e^{P(z)} dz$$

جس میں $P(z)$ ایک اولیٰ درجہ کا پولینومیل ہے

اور $P(z)$ کی شکل $P(z) = \alpha z + \beta$ ہے

یہاں $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ہیں

$$w' = \int_C z^\alpha e^{P(z)} P'(z) dz \quad (2)$$

$$w'' = \int_C z^\alpha e^{P(z)} P''(z) dz \quad (2)$$



تقریر کے لیے مقرر کنندہ

$$(1) \Rightarrow z \int_C z^\alpha e^{P(z)} P''(z) dz + (a+b+z) \int_C z^\alpha e^{P(z)} P'(z) dz + a \int_C z^\alpha e^{P(z)} dz = 0$$

(2)

$$\int_C z^\alpha e^{P(z)} [z^2 + a z + b z + z^2 + a] dz = 0 \Rightarrow \int_C (z^\alpha P'(z) [z Q(z) + R(z)]) dz = 0 \quad (3)$$

توضیحات:
تاریخ: 17.8.2014

(5)

در اینجا

$Q(x) = x^2 + x$

(2)

$R(x) = (a+b)x + a$

در اینجا

$\frac{d}{dx} [e^{2x} s(x)]$

(3)

در اینجا

$s(x) = (x^2 + x) p(x)$

$s'(x) = [(a+b)x + a] p(x)$

$\frac{s'(x)}{s(x)} = \frac{(a+b)x + a}{x^2 + x} \Rightarrow$

در اینجا

(2)

توضیحات:

$\frac{s'(x)}{s(x)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$

(4)

در اینجا

$(4) \Rightarrow \ln s(x) = \ln x^a + \ln (x+1)^b \Rightarrow$

$s(x) = x^a (x+1)^b$

$p(x) = \frac{s'(x)}{s(x)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} \Rightarrow p(x) = \frac{a-1}{x} + \frac{b}{x+1}$

$$\left[p(q) = \binom{a-1}{q} \binom{b-1}{q+1} \right] \quad (2)$$

مکرر کل باشد

$$(2) \Rightarrow W = \begin{bmatrix} z^q & a-1 & b-1 \\ e & \binom{a}{q} \binom{b}{q+1} \\ c \end{bmatrix} \quad (3)$$

مکرر کل باشد - اذ ا

$$\left[\begin{bmatrix} z^q & a \\ e & \binom{a}{q} \binom{b}{q+1} \end{bmatrix} = 0 \right] \quad (2)$$

مکرر کل باشد -
اگر ا و ب در دکل
مکرر کل باشد (3) و با تراها
مکرر کل باشد!

مکرر کل باشد - مکرر کل باشد

مکرر کل باشد - مکرر کل باشد

مکرر کل باشد - مکرر کل باشد



(6)

تاریخ: 17.8.2014

موضوع: معادلات دیفرانسیل

25

معادله دیفرانسیل مرتبه اول

y'' - y = f(x) - (1)

فرض کنیم y(x) محدود و مشتق پذیر باشد

پس از آنکه معادله (1) را حل می‌کنیم به دست می‌آوریم

y = c1 * e^-x + c2 * e^x - (2)

x -> -infinity y = e^x
x -> +infinity y = e^-x

در اینجا دو حالت داریم

در صورتی که f(x) = 0

معادله (1) به صورت y'' - y = 0 در می‌آید

G = { y1(x), y2(x) } - (3)

G(x,s) = { c1(s) * e^x, c2(s) * e^-x } - (3)

در اینجا c1(s) و c2(s) ضرایب هستند



7

2

$$\varphi(s) y_2(s) = \varphi(s) y_1(s)$$

$$\varphi(s) y_2'(s) - \varphi(s) y_1'(s) = \frac{1}{a(s)}$$

↓

2

$$\varphi(s) e^s = \varphi(s) e^s$$

$$-\varphi(s) e^s = \varphi(s) e^s + 1$$

⇒

4

$$\left[\varphi(s) = -\frac{1}{2} e^{-s}, \varphi(s) = -\frac{1}{2} e^s \right]$$

... ..

$$G(x, s) = \begin{cases} -\frac{1}{2} e^{x-s}, & -\infty \leq x \leq s \\ -\frac{1}{2} e^{s-x}, & s \leq x \leq +\infty \end{cases}$$

4

... ..

$$y(x) = \int_a^b G(s, x) f(s) ds, \quad a, b \in (-\infty, +\infty)$$

$$y(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(s, x) f(x) dx$$

3

$$\int_{-\infty}^x -\frac{1}{2} e^{x-s} f(s) ds + \int_x^{+\infty} -\frac{1}{2} e^{s-x} f(s) ds$$

عن الأسئلة التالية:

الأولى: (20 درجة) لنكن لدينا المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى :

$$\frac{dw}{dz} = f(z, w(z)) \quad \dots\dots\dots (1)$$

وبفرض ان الدالة $f(z, w)$ تحليلية في منطقة D وأنها دالة محدودة $|f| \leq M$ في D

وأنها تحقق في D شرط ليبشيتز بالنسبة إلى المتحول w وبفرض أن :

$$\{w = w_0 \text{ for } z = z_0\} \dots\dots\dots (2)$$

المطلوب : برهن أن الحل الذي يحقق المعادلة (1) ويحقق الشرط الابتدائي (2) هو وحيد !

ثاني: (30 درجة) أوجد الحل العام في جوار الحفر $z=0$ (نقطة عادية) للمعادلة التفاضلية :

$$w'' + zw' - w = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

ثم أوجد الحل الموافق للشرط الابتدائي :

$$w(0)=0, \quad w'(0)=1 \quad \dots\dots\dots (2)$$

ثالث: (30 درجة) أوجد الحل العام في جوار اللانهاية $z = \infty$ للمعادلة التفاضلية :

$$z^2 w'' + 2z w' + w = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

رابع: (20 درجة) أوجد حل المعادلة التفاضلية :

$$y'' - y = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

الذي يحقق الشرط الحدي :

$$[y(0)=3, \quad y(1)=y'(1)=1] \quad \dots\dots\dots (2)$$